* 029

La programmazione lineare //

Angelo Guerraggio

LA PROGRAMMAZIONE LINEARE. LA SUA STORIA. PROBLEMI DI SCELTA. LA GEOMETRIA ANALITICA. IL METODO DELLA CURVE DI LIVELLO.

I LABORATORI "MATEMATICA & REALTÀ" (PROGETTATI PER IL TRIENNIO FINALE DELLE SUPERIORI) APPROFONDISCONO ALCUNI ASPETTI DEL PENSIERO E DELLA STRUMENTAZIONE MATEMATICA: LA MATEMATICA È UNA CHIAVE ESSENZIALE PER CAPIRE MOLTI LATI DELLA VITA QUOTIDIANA. E ANCHE PER SAPERSI MUOVERE. CENTRALE È IL CONCETTO DI MODELLO. PERMETTE DI TRADURRE UN PROBLEMA CONCRETO IN UNA SIMULAZIONE FORMALE E NUMERICA. PUÒ COSÌ AVVALERSI DI TUTTA LA MATEMATICA GIÀ "PRONTA". NELLO STESSO TEMPO STIMOLA, CON LE SUE ESIGENZE, LA CREAZIONE DI NUOVA MATEMATICA. >>>

Con il termine di *programmazione lineare* si intendono quella teoria e quei metodi di calcolo utili per risolvere problemi di ottimo (di massimo o di minimo) quando la funzione obiettivo e i vincoli sono dati da espressioni lineari. Un esempio può subito servire a chiarire il senso di questa, diciamo, *definizione* di programmazione lineare. L'esempio è tratto dal libro di P. Brandi e A. Salvadori, *Modelli matematici elementari* (B. Mondadori ed., 2004), p. 190.

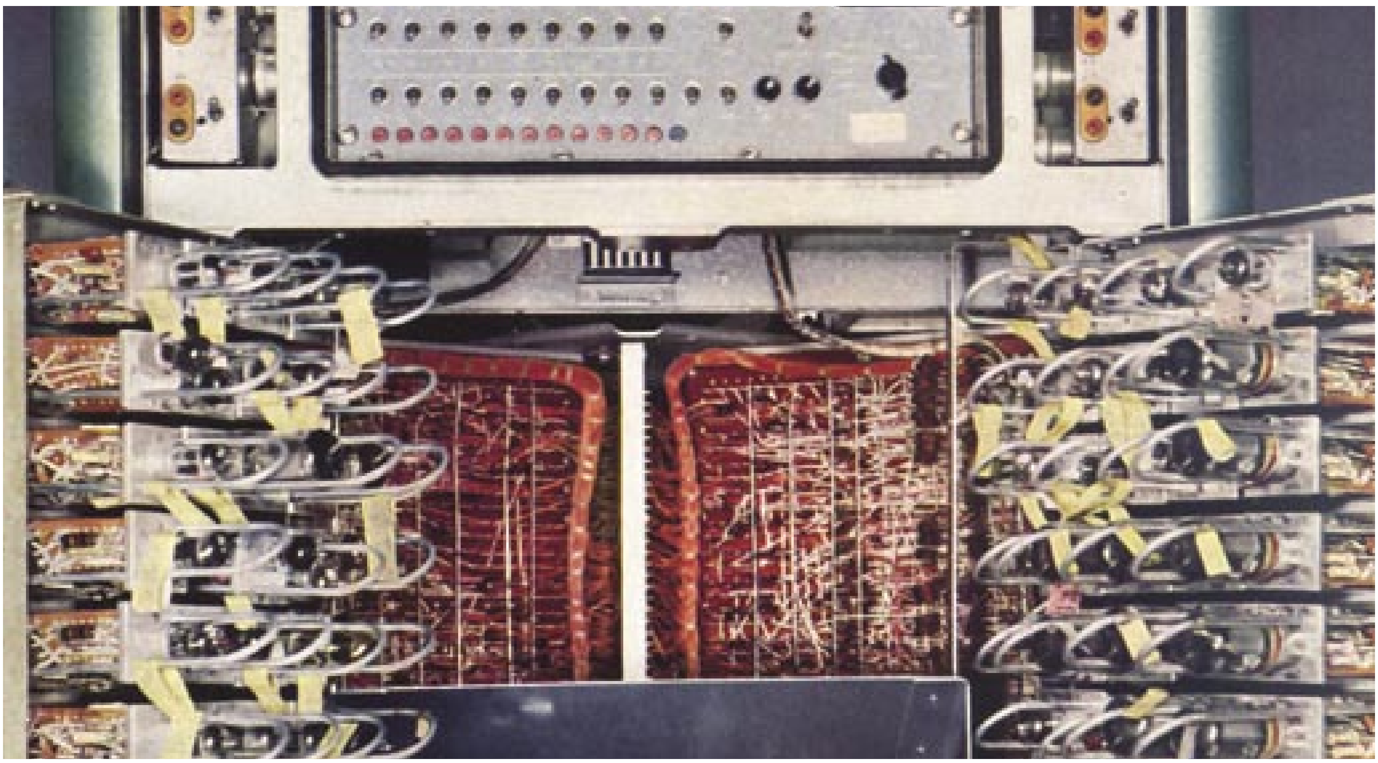
Un'azienda tessile produce due tipi di tessuti utilizzando tre filati (lana, poliestere, seta) in diversa proporzione. Nella tabella sono riportate le quantità di filati che occorrono per realizzare una pezza dei due tessuti (di lunghezza unitaria) e le giacenze del magazzino. Individuare la produzione che rende massimo il ricavo, sapendo che il rapporto tra i prezzi (unitari) dei tessuti *A* e *B* è 2/3.

Filato	Tessuto A	Tessuto B	Magazzino
lana	120 g	120 g	144 Kg
poliestere	180 g	90 g	180 Kg
seta	60 gr	180 g	180 Kg

L'esempio mette subito in evidenza come la *programmazione lineare* sia un "capitolo" della più generale *teoria dell'ottimizzazione*: si tratta di risolvere un problema di massimo o di minimo. Si tratta di prendere una decisione e di fare una scelta (ad esempio, in un problema economico concreto: aumentare o no le scorte del magazzino? con quali mezzi effettuare il trasporto? come ripartire le diverse quantità nei diversi magazzini?) in modo da rendere minimo un costo, un tempo di lavorazione, le spese di affitto, il consumo di energia, eccetera oppure da massimizzare il profitto, i risultati promozionali della campagna pubblicitaria, eccetera. Nel nostro caso, la funzione obiettivo – quella di cui occorre trovare il valore massimo – è la funzione ricavo.

Se indichiamo con *x* e *y* (per il momento, incogniti) i metri prodotti del tessuto *A* e del tessuto *B*, rispettivamente, la funzione ricavo *R* avrà l'espressione $R(x, y) = 2x + 3y$.
R è una funzione di due variabili (indipendenti). Queste, però, non sono libere di assumere qualsiasi valore ma sono soggette a dei vincoli. Anzitutto, deve essere $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Poi, la composizione dei tessuti *A* e *B* e le giacenze di lana, poliestere e seta nel magazzino portano a ulteriori condizioni:

$$\begin{cases} 120x + 120y \leq 144 \cdot 10^3 \\ 180x + 90y \leq 180 \cdot 10^3 \\ 60x + 180y \leq 180 \cdot 10^3 \end{cases}$$

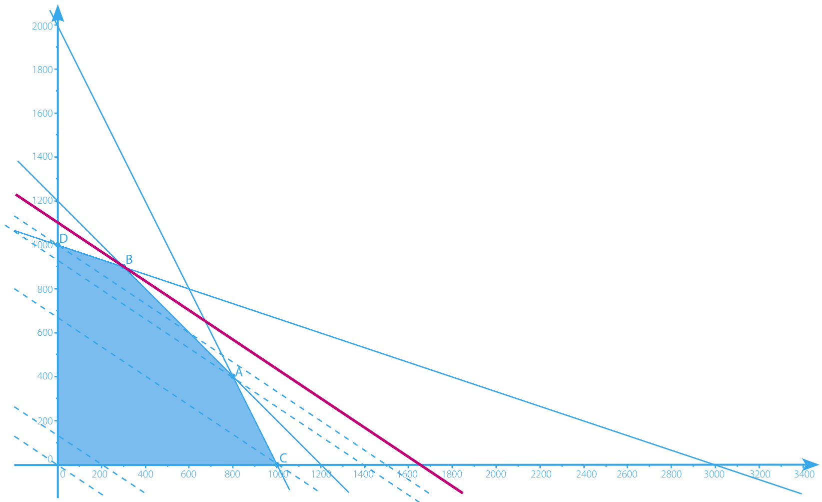


Questi vincoli (assieme alle condizioni di non negatività $x \geq 0$ e $y \geq 0$) individuano la cosiddetta *regione ammissibile* ovvero la regione delle strategie di produzione possibili (ammissibili, appunto) in cui va cercata quella particolare produzione che consente il massimo ricavo.
Senza dare la definizione rigorosa di funzione *lineare-affine*, osserviamo che il ricavo $R(x, y) = 2x + 3y$ e tutte le funzioni coinvolte nei precedenti vincoli sono dei polinomi (in questo esempio, di due variabili) di *primo* grado: geometricamente parlando, rappresentano delle rette! È questo che viene chiamato *problema di programmazione lineare* (quando tutte le funzioni – obiettivo e di vincolo – sono lineari, di primo grado).

La storia della programmazione lineare è interessante e relativamente recente. Mostra come alcune (molte?) invenzioni matematiche siano strettamente legate a esigenze di carattere economico o addirittura militare. Siamo negli anni attorno alla seconda guerra mondiale e la programmazione lineare nasce in URSS e in USA. In Unione Sovietica, il padre della programmazione lineare è *Leonid V. Kantorovich* (1912 – 1996) che – giovane professore a Leningrado – viene contattato nella primavera del '36 da un'azienda che produce legno compensato e intende rendere più efficiente l'utilizzo del proprio macchinario. Se in URSS la programmazione lineare si sviluppa in stretto collegamento con la sfera produttiva, all'interno del terzo piano quinquennale, negli Stati Uniti la sua nascita è maggiormente legata a ricerche svolte in ambito militare. Il nome di riferimento – considerato il vero e proprio fondatore della programmazione lineare – è qui quello di *George B. Dantzig* (1914 – 2005) che, negli anni della guerra, collaborava con il Pentagono come esperto di metodi di programmazione.
Il nome di Dantzig è legato, in particolare, ad un algoritmo risolutivo – il cosiddetto *metodo del simplesso* – da lui ideato nel '47. Gli algoritmi di calcolo sono di fatto essenziali per risolvere un problema di programmazione lineare, non appena il numero delle variabili *decisionali* (indipendenti) comincia ad aumentare. Ora, l'accresciuta potenza del calcolo e il raffinamento degli algoritmi permettono di risolvere problemi con decine di migliaia di vincoli e centinaia di migliaia di variabili!

Nella pagina a fianco: Interno di un vecchio calcolatore a valvole.

Noi, per concludere, torniamo all'esempio iniziale, in due variabili. Qui possiamo allora di usare il *metodo delle curve* (in questo caso, rette) *di livello*. Dato che la funzione obiettivo è data da $R(x, y) = 2x + 3y$, disegnamo la retta di equazione $2x + 3y = 0$ ($y = -2/3x$) che individua i punti, ovvero le strategie produttive, che assicurano ricavo $R = 0$. Poi aumentiamo il livello e disegnamo ad esempio le rette $2x + 3y = 100$, $2x + 3y = 200$, eccetera.



Vediamo così che in questo caso, più "spostiamo in alto" la retta, più individuiamo strategie produttive profittevoli. La massima strategia produttiva – nel senso di assicurare il massimo ricavo – è allora quella passante per il punto *A* *(300, 900)* intersezione tra le rette $x + y = 1200$ e $x + 3y = 3000$: con *300 m* del primo tessuto e *900 m* del secondo, si realizza un ricavo (massimo) di 3.300 Euro. L'esempio è sufficiente per comprendere la conclusione più importante e generale: nei problemi di programmazione lineare – in due variabili, riusciamo proprio a vederlo! – il punto di ottimo è sempre dato da un vertice della regione ammissibile (o da tutti i punti di un suo lato, se due vertici consecutivi dessero lo stesso valore per la funzione obiettivo). È inutile ripetere la costruzione delle curve di livello. Basta calcolare il valore della funzione obiettivo in corrispondenza dei vertici e scegliere quello che garantisce il valore ottimale! ////////////////////////////////// :)

[LA MATEMATICA DEI BISCOTTI]

di Roberto Bello
http://www.freeopen.org

Nei lontani anni '70 del secolo scorso, i computer non erano ancora portatili. Occupavano ampi locali climatizzati, si chiamavano *elaboratori centrali*, avevano la dimensione di grossi armadi "quattro stagioni" e i dati di input che li alimentavano di informazioni erano scritti su schede di cartoncino con tanti buchi rettangolari.

Negli stessi anni prosperava un'azienda italiana che produceva alimenti dietetici per l'infanzia: biscotti, omogeneizzati, pastine, pappe, succhi di frutta e altri prodotti simili.

A capo dei sistemi informativi, c'era un dirigente ventottenne che amava la Statistica e la Matematica applicata. Un giorno, gli venne l'idea di provare se fosse stato possibile ridurre il costo del biscotto – che era il prodotto principale dell'azienda – con il vincolo di non compromettere le sue qualità nutrizionali.

A quei tempi il biscotto (come gli altri prodotti dietetici), oltre a rispettare i vincoli di composizione chimica indicati in etichetta, doveva rispettare la lista delle materie prime utilizzate e indicate in ordine decrescente di presenza (lista depositata presso il Ministero della Sanità di allora). In etichetta erano indicate le percentuali minime o massime di proteine, carboidrati, lipidi, zuccheri, minerali, calorie, residuo secco, eccetera. Nella lista delle materie prime, si indicava che nel biscotto si utilizzava della farina di grano senza alcuna ulteriore specificazione se questa fosse di tipo *zero* o di tipo *uno*. La farina di tipo *uno* è più ricca di proteine e di minerali e costava molto meno della farina di tipo *zero*.

A quei tempi, le aziende dietetiche facevano a gara a chi avesse il biscotto maggiormente proteico per rendere i bambini sani e forti. La presenza del 14% di proteine nel biscotto era ottenuta dall'apporto del latte in polvere e da un integratore alimentare molto costoso e costituito da un super concentrato di proteine di origine animale.

Il dirigente ventottenne aveva già tradotto in linguaggio *Fortran* l'algoritmo del *simplesso* della programmazione lineare e aveva caricato il programma compilato nelle memorie a dischi dell'elaboratore centrale. Dapprima, volle verificare quale fosse la ricetta ottimale utilizzando soltanto la farina di tipo *zero* nel rispetto dei vincoli di composizione chimica e di sequenza nella lista degli ingredienti, ottenendo il costo finale della ricetta. Il modello (rappresentato su schede perforate) conteneva la matrice dei coefficienti, il vettore dei vincoli e la funzione obiettivo da minimizzare.

Occorrevano diversi minuti perché uscisse dalla stampante la soluzione. Ora il tempo di elaborazione sarebbe limitato a meno di un secondo, utilizzando un normalissimo PC.

Poi, sempre il nostro dirigente ventottenne, provò a introdurre anche la farina di tipo *uno* con risultati davvero importanti: il costo finale della ricetta risultava inferiore del 10% rispetto alla ricetta che utilizzava solo la farina di tipo *zero*. L'apporto proteico della farina di tipo *uno* aveva reso infatti possibile un minor utilizzo del latte in polvere.

Una riduzione del 10% nel costo delle materie prime del biscotto, applicata ai volumi correnti della produzione annuale, era equivalente al 150% del budget totale dei sistemi informativi dell'azienda: canoni di locazione dell'elaboratore centrale e delle periferiche, stipendi dei dipendenti, materiali di consumo, consulenze, spese di manutenzione.

Ma sembrava troppo bello per essere vero! Occorrevano delle verifiche. Il Direttore centrale Marketing e l'Amministratore delegato vollero verificare che la nuova ricetta fosse ugualmente apprezzata dalle mamme. Così, si organizzarono dei *panel* di assaggio, nei quali si posero a confronto i biscotti di nuova formulazione con i biscotti di formulazione standard (naturalmente, senza rendere evidente alle mamme assaggiatrici quali fossero i biscotti nuovi e quali quelli tradizionali). L'esito, sempre confermato da *panel* di assaggio via via più estesi, fu sempre lo stesso: il biscotto di nuova formulazione era migliore perché di gusto più naturale e meno farmaceutico.

Questo episodio, lontano nel tempo, dimostra quanto la programmazione lineare e, in generale, la Matematica applicata possano essere utili alle aziende. A dispetto dei preconcetti e delle diffidenze di molti manager.